FOURIER SERİLERİ

Bu bölümde Fourier serilerinden bahsedeceğim. Önce harmoniklerle (katsıklıklarla) ilişkili sinüsoidin tanımından başlıyacağım ve serilerin trigonometrik açılımlarını kullanarak katsayıları belirlemek için gerekli prosedürleri vereceğim. Daha sonra, simetrinin farklı tiplerinden bahsedip çeşitli örneklerle bu yaklaşımları göstereceğim.

Dalga Analizi

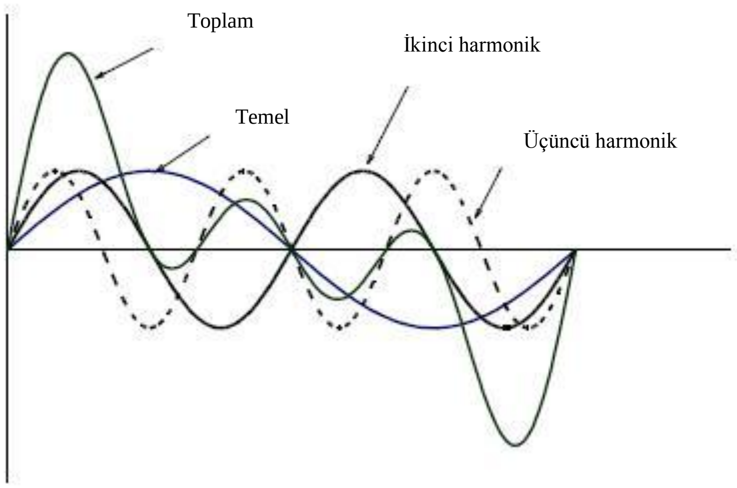
Fransız matematikçi Fourier kendini belirli aralıklarla tekrar eden bir dalga şekli olan dönemli (periyodik) dalga şeklinin tanımı yapmış ve harmoniklere sahip sinüsoidin, yani tüm frekansları temel frekansının (ilk harmonik) katları olarak bulunabilen, bir serisi olarak açıklamıştır. Örneğin, 1 MHz, 2 Mhz, 3 Mhz ve devamı şeklinde bir sinüsoid serisinin 1 Mhz temel frekansı, 2 MHz ikinci harmoniği ve devamı şeklinde frekansları içerir. Genelde herhangi bir dönenli dalga şekli f(t)

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\omega t+a_2\cos 2\omega t+a_3\cos 3\omega t+\cdots+b_1\sin\omega t+b_2\sin 2\omega t+b_3\sin 3\omega t+\cdots \qquad (1)$$

veya

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right) \qquad (2)$$

şeklinde gösterilir. Burada $a_0/2$ bir sabittir ve f(t)'nin DC (ortalama) bileşenini verir. Böylece, f(t) bir v(t) voltajı veya bir akım değeri i(t)'yi gösteriyorsa $a_0/2$ terimi v(t) veya i(t)'nin ortalama değeridir. a_1 ve b_1 katsayıları ω'nın temel frekans bileşenlerini gösterir. Benzer şekilde, a_2 ve b_2 katsayıları ω'nın ikinci harmonik bileşenlerini gösterir ve diğer katsayılarda diğerlerine benzerdir. Genelde, farklı frekasta birden fazla sinüsoidin toplamı bir dalga şeklini verir (bakınız Şekil 1).



Şekil 1. Temel, ikinci ve üçüncü harmoniğin toplamı

Eşitlik 1'deki ai ve bi katsayılarını hesaplamak zor değildir, çünkü sinüs ve kosinüs ortagonal (birimdik) işlevlerdir ve 0'dan 2π'ye integral (tümlev) altında sinüs ve kosinüs işlevlerinin çarpımı sıfırdır. Şimdi bunun ispatını yapalım.

$$\int_{0}^{2\pi} \sin mt dt = 0 \tag{3}$$

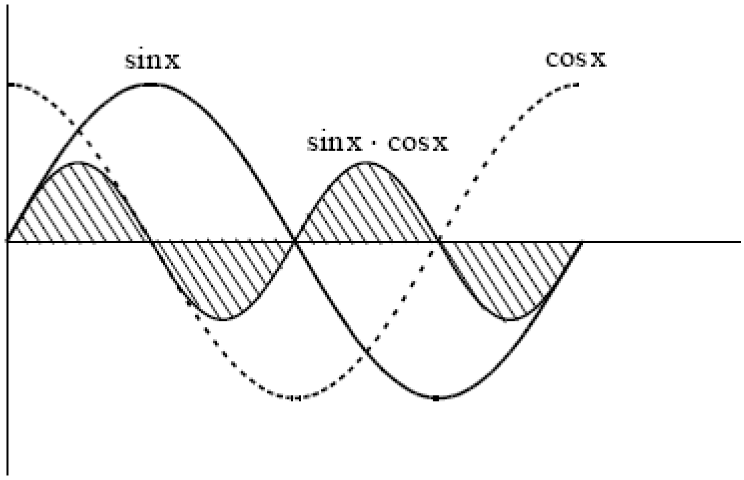
$$\int_{0}^{2\pi} \cos mt dt = 0 \tag{4}$$

$$\int_{0}^{2\pi} (\sin mt)(\cos nt) dt = 0 \tag{5}$$

Eşitlik 3 ve 4 sıfırdır, çünkü 0'dan 2π'ye altında kalan alan sıfırdır. Dolayısıyla, Eşitlik 5'te sıfırdır, çünkü

$$\sin x . \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

Bu durum Şekil 2'de açıkça görülmektedir ve şekil incelendiğinde zaman eksenin altında kalan alanın sıfır olduğu açıkça görülür.



Şekil 2. $\int_{0}^{2\pi} (\sin mt)(\cos nt) dt = 0$'in grafiksel ispatı

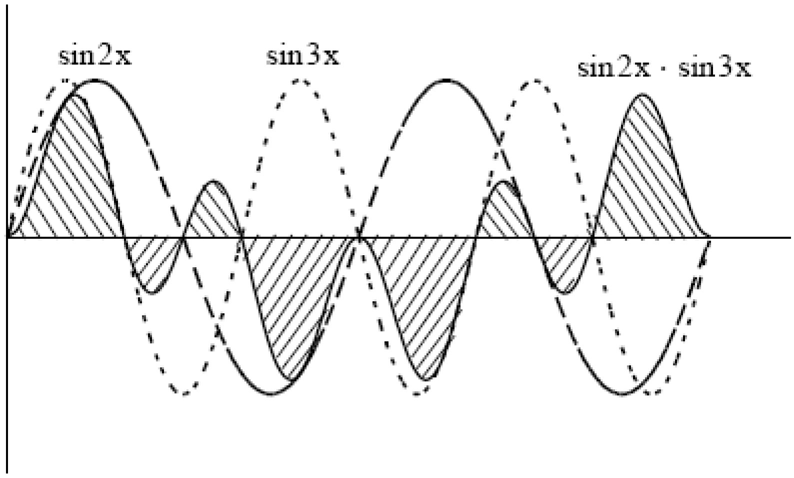
Buna ek olarak, m ve n farklı tamsayılar ise

$$\int_{0}^{2\pi} (\sin mt)(\sin nt) dt = 0 \tag{6}$$

çünkü

$$\sin x . \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$

Eşitlik 6'daki integral, m=2 ve n=3 için Şekil 3'te gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi zaman eksenin altında kalan alan sıfırdır.



Şekil 3. m=2 ve n=3 için $\int_0^{2\pi}(\sin mt)(\sin nt)dt = 0$ 'in grafiksel ispatı

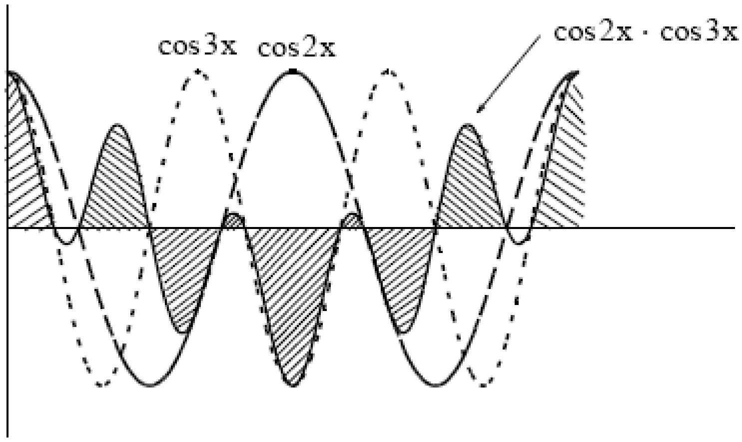
Benzer şekilde, eğer m ve n farklı tamsayılar ise

$$\int_0^{2\pi}(\cos mt)(\cos nt)dt = 0 \qquad (7)$$

çünkü

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$$

Eşitlik 7'deki integral, m=2 ve n=3 için Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi zaman eksenin altında kalan alan sıfırdır.



Şekil 4. m=2 ve n=3 için $\int_0^{2\pi}(\cos mt)(\cos nt)dt = 0$ 'in grafiksel ispatı

Eğer Eşitlik 6 ve 7'deki m=n ise

$$\int_0^{2\pi}(\sin mt)^2\,dt = \pi \qquad (8)$$

ve

$$\int_0^{2\pi}(\cos mt)^2\,dt = \pi \qquad (9)$$

şeklindedir. Eşitlik 8 ve 9'un grafiksel olarak çizimi Şekil 5 ve 6'da gösterilmiştir.

Daha önceden de belirttiğim gibi, sinüs ve kosinüs işlevleri birbirleri ile birimdiktir. Bu basitleşitrme, sinüs ve kosinüs işlevlerinin birimdiklik özelliklerinin uygulamalarından bulunur. Basitleştirmek için Eşitlik 1'de ω=1 alalım.

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+a_3\cos 3t+\cdots+b_1\sin t+b_2\sin 2t+b_3\sin 3t+\cdots \quad (10)$$

Eşitlik 10'daki herhangi bir katsayıdan biri olan, örneğin b_2 katsayısını bulmak için bu eşitliğin her iki tarafını sin2t ile çarpalım.

$$f(t)\sin 2t=\frac{1}{2}a_0\sin 2t+a_1\cos t\sin 2t+a_2\cos 2t\sin 2t+\cdots+b_1\sin t\sin 2t+b_2(\sin 2t)^2+b_3\sin 3t\sin 2t+\cdots$$

Sonra, eşitliğin her iki tarafını dt ile çarpalım ve her iki tarafın0'dan 2π'ye integralini alalım.

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin 2t\,dt=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt+a_1\int_0^{2\pi}\cos t\sin 2t\,dt+a_2\int_0^{2\pi}\cos 2t\sin 2t\,dt+\cdots+b_1\int_0^{2\pi}\sin t\sin 2t\,dt+b_2\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2dt+\cdots$$

Bu eşitlik incelendiğinde sağ taraftaki

$$b_2\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2\,dt$$

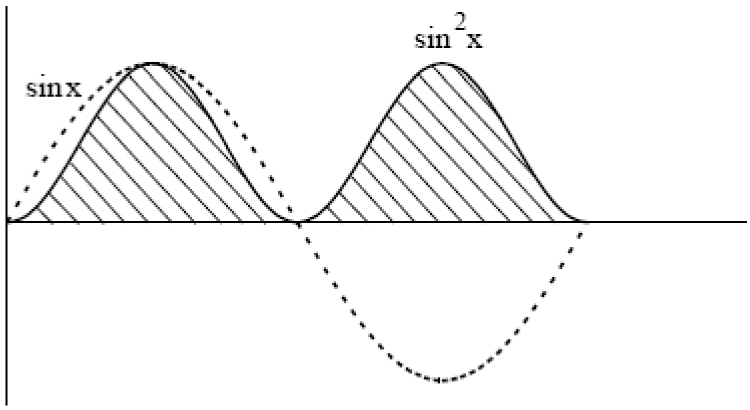
terimi dışındaki tüm terimlerin sıfır olduğu açıktır. Böylece bu eşitlik

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin 2t\,dt=b_2\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2\,dt=b_2\pi$$

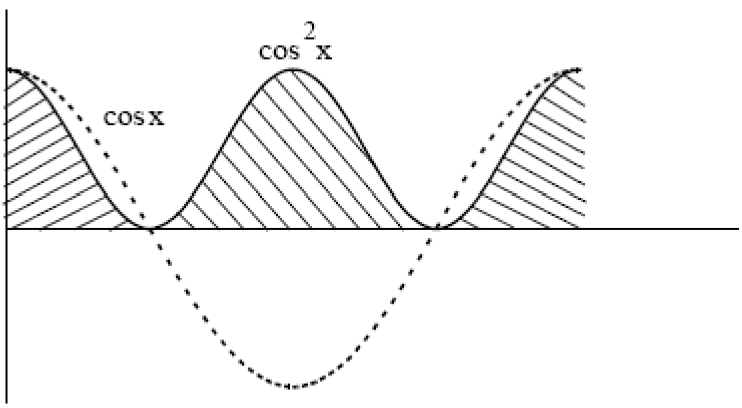
veya

$$b_2=\int_0^{2\pi} f(t)\sin 2t\,dt$$

şekline indirgenebilir. Böylece, herhangi bir işlev f(t)'nin integrali kolayca hesaplanabilir ve kalan katsayılar benzer şekilde bulunabilir.



Şekil 5. $\int_0^{2\pi}(\sin mt)^2\,dt=\pi$'in grafiksel ispatı



Şekil 6. $\int_{0}^{2\pi} (\cos mt)^2 \, dt = \pi$ 'in grafiksel ispatı

Aynı adımlar diğer katsayılar için teker teker uygulandığında a_0, a_n ve b_n katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) dt \tag{11}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \cos ntdt \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) \sin ntdt \tag{13}$$

Trigonometrik Fourier Serilerinde Simetri

Bilimde ve mühendislikte ortalama, sinüs, kosinüs gibi terimler sıklıkla kullanılır. Bazı dalga şekilleri sadece kosinüs veya sadece sinüs terimleri içerir. Bazıları ise sadece DC bileşene sahiptir. Trigonometrik Fourier terimlerinin hesaplaması verilen dalga şeklinin simetrisine bakarak yapılabilir. Burada bahsedeceğimiz üç tip simetri (bakışım) şekli vardır. Bunlar:

1. Tek simetri; Eğer bir dalga şekli tek simetriye sahip yani tek işlev ise, bu seri sadece sinüs termlerine sahiptir. Başka bir deyişle, f(t) tek işlev ise, a_0 katsayısını içeren a_i katasayılarının hepsi sıfır olacaktır.
2. Çift simetri; Eğer bir dalga şekli çift simetriye sahip yani çift işlev ise, bu seri sadece kosinüs termlerine sahiptir, ve a_0 katsayısı sıfır olabilir veya olmayabilir. Başka bir deyişle, f(t) çift işlev ise, b_i katasayılarının hepsi sıfır olacaktır.;
3. Yarım dalga simetri; Eğer bir dalga şekli yarım dalga simetriye (daha sonra tanımlayacağım) sahipse, sadece tek harmonikler (tek sinüs ve tek kosinüs) olacaktır. Başka bir deyişle, çift (çift kosinüs ve çift sinüs) harmonikler sıfır olacaktır.

Daha önceki tanımlamalardan da bilindiği gibi, tek işlev –f(-t)=f(t), çift işlev ise f(-t)=f(t)'dir. İki tek ilev veya iki çift işlevin çarpımı çift işlevdir, oysa ki bir tek ve bir çift işlevin çarpımı tek işlevdir. Ayrıca, bir tek ve bir çift işlevin toplamı (yada farkı) ne çift nede tek olan bir işlev olacaktır.

Şimdi yarım dalga simetri ne demek ona bakalım. Daha önceden de bildiğiniz gibi, herhangi bir T dönemli dönemsel işlev, f(t)=f(t+T) şeklinde tanımlıdır. Yani, herhangi bir t anında f(t)'nin değeri, t+T anındaki f(t) değeri ile aynı olacaktır.

Tanım: Eğer

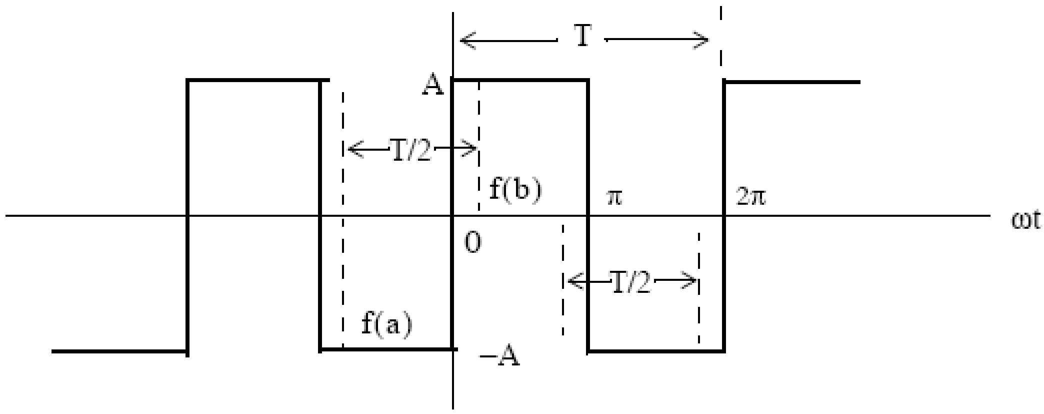
$$-f(t + T/2)=f(t)$$

ise, T dönemli bir dönemsel işlev yarım dalga simetriye sahiptir. Yani, dalga şeklinin negatif yarı çevrim şekli pozitif yarı çevrim ile aynı olacaktır, tek farkı ters çevrilmiş olmasıdır. Şimdi bir kaç örnekle bu durumu inceleyelim.

Örnek: **Kare dalga da simetri**

Şekil 7'deki kare dalgayı inceleyelim. Dönemi T'dir ve ortalama değeri sıfırdır. Bu nedenle, a_0 sıfırdır. Bu dalga şekli orijine göre simetriye sahip olduğu için tek işlevdir ve yarım dalga simetriktir.

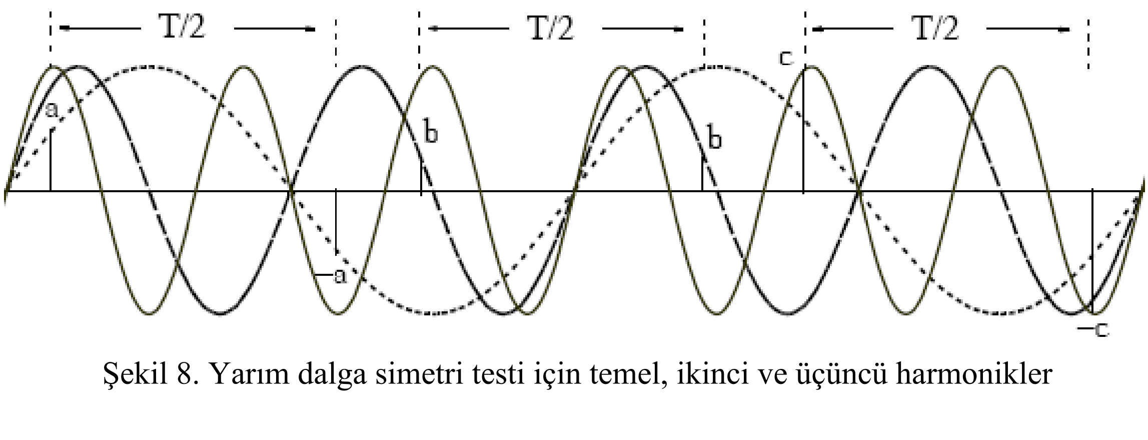
Yarım dalga simetriyi test etmek için kolay bir yöntem şu şekilde açıklanabilir. Önce zaman ekseninde yarım dönemi T/2 alarak orijine göre sol ve sağda f(a) ve f(b) gibi iki nokta belirlenir (bakınız Şekil 7). Eğer yarım dalga simetri varsa, bu iki değer aynı olacaktır. Tek fark ters işaretli olmalarıdır.



Şekil 7. Kare dalga üzerinde yarım dalga simetri testi

Temel, İkinci ve Üçüncü Harmoniklerdeki Simetri

Şekil 8'de tipik bir sinüs dalganın temel, ikinci ve üçüncü harmonikleri gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi yarım dönem T/2 seçilmiştir. Bu temel, ikinci ve üçüncü harmonikler için yarım dalga simetrinin test edilmesinde gereklidir. Temel harmonik yarım dalga simetriktir çünkü, T/''ye göre baktığımızda (sağ ve sol taraflarına) a ve –a değerleri aynı ve ters işaretlidir. İkinci harmonik yarım dalga simetrik değildir çünkü, orijinin solundaki ve sağındaki b, aynıdır ancak ters işaretli değildir. Üçüncü harmonik yarım dalga simetriktir çünkü, benzer şekilde orijine göre c katsayıları ters işaretli ve aynı değerlidir. Bu dalga şekilleri pozisyon ve orijine göre ne tek ne de çift işlevlerdir. Ayrıca, bu üç dalga şekli yatay eksen yukarı veya aşağı hareket ettirilmedikçe sıfır ortalama değere sahiptir.
Temel trigonometrik Fourier seri katsayıları eşitliklerine dönersek, a_n ve b_n katsayıları için integral limitleri 0'dan 2π'ye yani bir T dönemi olarak verilmiştir. Doğal olarak, integral sınırları – π, π arasında seçilir ve verilen dalga şekli çift veya tek veya yarım dalga simetriye sahipse, a_n ve b_n katsayıları 0'dan π'ye integre edilerek hesaplanır ve bulunan değer 2 ile çarpılır. Eğer dalga şekli yarım dalga simetrik ve çift veya tek işlev ise, a_n ve b_n katsayıları 0'dan π/2'ye integre edilerek hesaplanır ve bulunan değer 4 ile çarpılır. Bunun ispatı çok basittir çünkü, iki çift ve tek işlevin çarpımı yine çifttir.



Şekil 8. Yarım dalga simetri testi için temel, ikinci ve üçüncü harmonikler