ÖRTÜŞME (ALIASING)

Aşağıdaki gibi bir kesikli-zaman sinüsoidal işlev alalım.

$$x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$$

İfadeden görüldüğü gibi Ω=4п rad/örnek'tir. Cosinüs işlevi mod 2п işlevi olduğu için

$$\begin{aligned} x_2[n] &= \cos(2.4\pi n) = \cos[(2+0.4)\pi n] = \cos(0.4\pi n + 2\pi n) \\ &= \cos(0.4\pi n) = x_1[n] \end{aligned}$$

yazılır. Buradan; Ω=2.4п, Ω=0.4п ile aynı dizi değerlerini verdiği için bu iki frekans (sıklık) değeri örtüşür.
Bu ifadeyi genelleştirirsek

$$\boldsymbol{\Omega_l = \Omega + 2\pi l; \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots}$$

şeklinde gösterilir. Bu ifade; sinüs ve cosinüs işlevlerinin mod 2п özelliğinden dolayı cos(Ω_ln) için özdeş frekans örneklerini verir. Matematiksel işlemi bir adım ileriye götürürsek, cos(Ө)=cos(-Ө) olduğu için, yeni bir işlev aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \cos(1.6\pi n) = \cos[(2-0.4)\pi n] = \cos(2\pi n - 0.4\pi n) \\ &= \cos(-0.4\pi n) = \cos(0.4\pi n) \end{aligned}$$

Buradan görülebileceği gibi; Ω=1.6п frekansı ile Ω=0.4п frekansı aynı dizi değerlerini verdiği için bu iki frekans örtüşür. Sinüs ve cosinüs işlevlerinin mod 2п ve tekillik özelliklerinden dolayı örtüşme frekansları için yazılan genel ifade

$$\Omega_l = 2\pi l - \Omega; \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuç, sinüs işlevi için de geçerlidir. Ancak sin(-Ө)=-sin(Ө) olduğu için genlikte tersine çevirme yapılmalıdır. Yani işlem sonunda genliğin ters işaretlisi alınmalıdır.

Özet olarak; herhangi bir tamsayı l değeri için ayrık-zaman frekansları

$$\boldsymbol{\Omega, \Omega + 2\pi l, 2\pi l - \Omega; \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots}$$

yazılır. Tüm bu frekans değerleri için cosinüs işlevi aynı dizi değerlerini verir. Sinüs işlevinde ise genliğin eksilisi alınmalıdır.
Genellieştirilen bu ifadelere evre de ilave edildiğinde

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\cos[(\Omega + 2\pi l)n + \emptyset] = \mathrm{A}\cos[\Omega n + 2\pi l n + \emptyset] = \mathrm{A}\cos(\Omega n + \emptyset) \\
&\mathrm{A}\cos[(2\pi l - \Omega)n - \emptyset] = \mathrm{A}\cos[2\pi l n - \Omega n - \emptyset] = \mathrm{A}\cos(-\Omega n - \emptyset) \\
&\qquad = \mathrm{A}\cos(\Omega n + \emptyset)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta evre işleve eklendiğinde ikinci eşitlikte evrenin işaretinin eksili olmasıdır. $\Omega\epsilon[0, \pi)$'nın en küçük değeri ana örtüşme frekansını verir. Örnekleme işlemi bir sürekli-zaman işlevine uygulandığında, örtüşme frekansları şu şekilde yazılır.

$$\Omega = \omega T_S \quad \text{veya} \quad \omega = \frac{\Omega}{T_S} = \Omega f_S$$

Sürekli-zaman işlevinden faydalanarak örtüşme frekansları için verilen eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\omega_0, \omega_0 + 2\pi l f_S, 2\pi l f_S - \omega_0; \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots \\
f_0, f_0 + 2\pi l f_S, 2\pi l f_S - f_0; \quad l = 0, 1, 2, 3, \cdots
\end{aligned}$$

bulunur.
Sürekli-zaman ortamından t→nTS ortamına geçerek $\mathrm{A}\cos(2\pi f_0 t + \emptyset)$ işlevi örneklendiğinde

$$\mathrm{A}\cos[2\pi f_0(nT_S) + \emptyset] = \mathrm{A}\cos[2\pi(f_0 + l f_S)(nT_S) + \emptyset] \quad = \mathrm{A}\cos[2\pi(l f -_S f_0)(nT_S) - \emptyset]$$

yazılır.

<u>**Örnek:**</u> f_S=400 Hz'de örneklenmiş 60 Hz, 340 Hz ve 460 Hz frekanslı üç sinüsoidal işlev alalım. Analog sinyaller

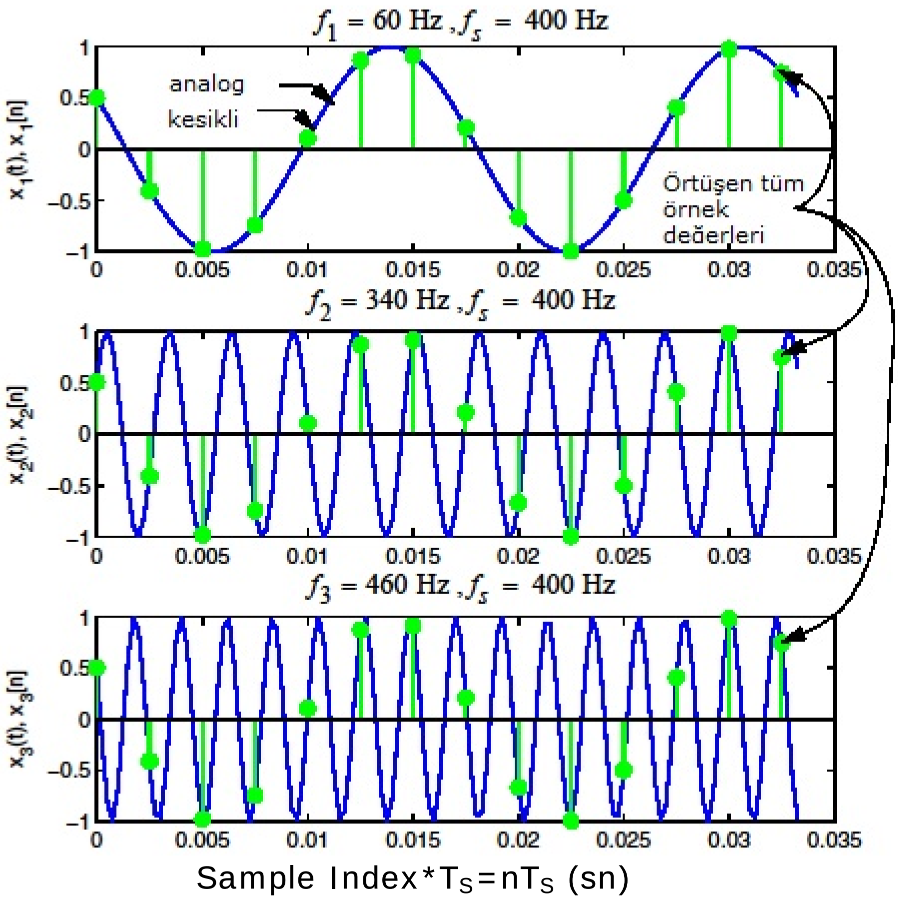
$$x_1(t) = \cos(2\pi 60t + \pi/3)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi 340t - \pi/3)$$
$$x_3(t) = \cos(2\pi 460t + \pi/3)$$

şeklindedir.

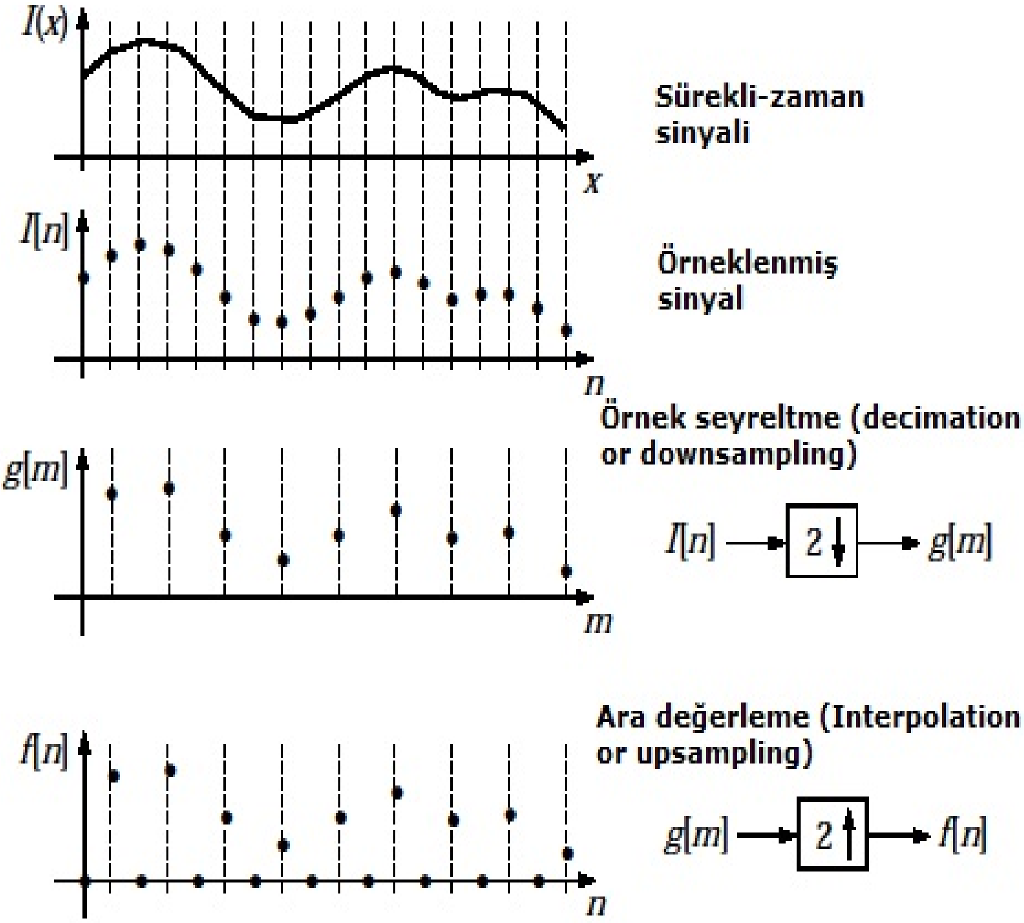
MATLAB KODU:

```
>>ta=0:1/4000:2/60; % analog time axis
>>xa1=cos(2*pi*60*ta+pi/3);
>>xa2=cos(2*pi*340*ta-pi/3);
>>xa3=cos(2*pi*460*ta+pi/3);
>>tn=0:1/400:2/60; % discrete-time axis as n*Ts
>>xn1=cos(2*pi*60*tn+pi/3);
>>xn2=cos(2*pi*340*tn-pi/3);
>>xn3=cos(2*pi*460*tn+pi/3);
```



Burada; üç sinyalde türdeştir ve 60, 340 ve 460 Hz, 400 Hz'lik örnekleme hızında örtüşen frekanslardır.

ÖRNEK SEYRELTME (DOWNSAMPLING) VE ARA DEĞERLEME (UPSAMPLING)



<u>Örnek (Örnekleme Kuramı)</u>

Consider the signal

$$x_1(t) = \cos(2\pi 1000t + \theta) + 10\cos(\pi 6000t + \theta)$$

which is sampled at f_S=2500 Hz to obtain x[n]=x(n/f_S).
(a) Is there any aliasing present?
(b) What are the principle alias frequency, in Hz, present in x(t) relative to the given sampling frequency?
(c) Find the corresponding Ω for each of the principle alias frequencies of x(t).
(d) Sketch the amplitude line spectra plot of x(t) along with the principle alias spectral lines, to make it clear where aliasing is present.

<u>Yanıt:</u>

(a) x(t) sürekli-zaman işlevinin ana frekansları 1000 Hz ve 3000 Hz'dir. 2500 Hz'de örnekleme yapılmıştır. Ancak, bu frekans, en büyük frekans bileşeni 3000 Hz'den büyük değildir. Bu nedenle 3000-2500=500 Hz'de örtüşme meydana gelecektir.
(b) Pozitif frekanslar için ana örtüşme bandı [0, f_S/2) veya [0, 1250) Hz'dir.
f_1=1000<1250 Hz ve f_2=3000>1250 Hz. Ana örtüşme frekansları; her tamsayı l ve f_{a2}∈[0, 1250) için, f_{a2}=lf_S-f_2 veya f_{a2}=f_2-lf_S'dir.
Sonuçta l=1 için f_{a2}=3000-2500=500 Hz'dir.
(c) Sürekli-zaman değişkeni f'i kesikli-zaman değişkeni Ω'ya dönüştürürsek (Ω=2πf/f_S)

$$\Omega = 2\pi\frac{1000}{2500} = 0.8\pi \quad \text{ve} \quad \Omega_{ap} = 2\pi\frac{500}{2500} = 0.4\pi$$

(d)